Integración

El cálculo integral es de gran importancia en muchas áreas de estudio, como la economía, la biología, la química, la física y la matemática en general. Las aplicaciones más conocidas del cálculo integral son en:

1. El cálculo de áreas, longitudes de arco y volúmenes.

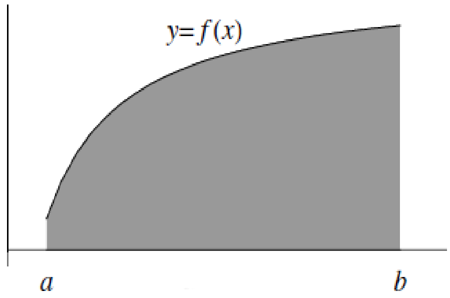
2. La solución de ecuaciones diferenciales. Por lo que las integrales y derivadas son de gran utilidad para resolver un gran número de problemas en física, ya que éstos se modelizan en su mayoría con ecuaciones diferenciales.

3. El cálculo de probabilidades para variables aleatorias continuas.

En este tema vamos a considerar dos partes. En la primera parte nos ocuparemos del problema de calcular una primitiva o la integral indefinida de una función. Es decir, dada una función $f(x)$, queremos determinar otra función $F(x)$ tal que para todo x del dominio de $f(x)$ se verifique que $f(x) = F'(x)$. Por tanto, en la primera parte veremos la integración como el proceso inverso de la derivación.

En la segunda parte se define el concepto de integral de Riemann, o integral definida, de una función acotada en un intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Este concepto surge de la necesidad de calcular áreas de regiones planas limitadas por líneas curvas. Es decir, se plantea el problema de calcular el área comprendida entre la curva dada por una función positiva $f(x)$, por las rectas $x = a$ y $x = b$, con $a < b$, y el eje de abscisas (véase figura 1).

Figura 1:



Los problemas considerados en ambas partes están estrechamente relacionados como veremos mediante el teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona la derivada y la integral y facilita el cálculo de la integral definida.

Parte I: Cálculo de primitivas

1. Función primitiva. Definición

$F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f.

OBSERVACIÓN: Dado que dos funciones que se diferencian en una constante tienen la misma derivada, se tiene que si F es una primitiva de f entonces $F + C$, para todo $C \in \mathbb{R}$, también es una primitiva de f.

2. Función integral indefinida. Definición

Dada la función f, se llama función integral indefinida de f al conjunto de todas sus funciones primitivas, y se escribe:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria y F una primitiva cualquiera de f.

3. Integrales inmediatas

En la tabla 1 se presentan algunas integrales inmediatas, obtenidas considerando la integración como un proceso inverso de la derivación.

Tabla 1: Tabla de integrales inmediatas

$\int k\,dx = kx + C$	$\int g(x)^n g'(x)\,dx = \frac{g(x)^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$\int e^{g(x)} g'(x)\,dx = e^{g(x)} + C$	$\int a^{g(x)} g'(x)\,dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C$
$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln\lvert g(x)\rvert + C$	
$\int \cos g(x)\,g'(x)\,dx = \operatorname{sen} g(x) + C$	$\int \operatorname{sen} g(x)\,g'(x)\,dx = -\cos g(x) + C$
$\int \sec^2 g(x)\,g'(x)\,dx=$ $\int (1+\operatorname{tg}^2 g(x))g'(x)\,dx =$ $= \int \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}\,dx = \operatorname{tg} g(x) + C$	$\int \operatorname{cosec}^2 g(x)\,g'(x)\,dx =$ $\int (1+\operatorname{cotg}^2 g(x))g'(x)\,dx =$ $= \int \frac{g'(x)}{\operatorname{sen}^2 g(x)}\,dx = -\operatorname{cotg} g(x) + C$

Tabla de integrales inmediatas (continuación)

$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,dx = \text{arc sen}\, g(x) + C$	$\displaystyle\int \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,dx = \text{arc cos}\, g(x) + C$ $= -\text{arc sen}\, g(x) + C$
$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}\,dx = \text{arc tg}\, g(x) + C$	$\displaystyle\int \frac{-g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx = \text{arc cotg}\, g(x) + C$ $= -\text{arc tg}\, g(x) + C$

4. Propiedades de la integral

Dadas dos funciones f y g que admiten primitiva y una constante $k \in I\!R$, se verifica:

1. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

5. Técnicas de integración

En esta sección se presentan algunas técnicas que permiten transformar integrales complicadas en otras más sencillas.

5.1. Cambio de variable

Supongamos que se quiere obtener una integral del tipo $\displaystyle\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$, donde f es una función continua y g una función con derivada g' continua. Entonces, haciendo $t = g(x)$, se tiene

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$.

Puesto que $\frac{1}{x}$ es la derivada de $\ln x$, haciendo el cambio $t = \ln x$, se tiene que $dt = \frac{1}{x}\,dx$.

Entonces, $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$

5.2. Integración por partes

Si f y g son dos funciones derivables se verifica que

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Normalmente se suele escribir la expresión anterior de la forma siguiente:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

El objetivo es el de reducir la integral inicial a otra más sencilla. Por tanto, se elige como u la función cuya derivada resulte ser una función más simple y de modo que sepamos obtener una primitiva para dv.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int x\cos x\,dx$.

Eligiendo $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$, se tiene que $du = dx$ y $v = \operatorname{sen} x$. Aplicando la fórmula de integración por partes se obtiene:

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

6. Integración de funciones racionales

Una función es racional si es el cociente de dos polinomios, es decir, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Su dominio es $I\!R$ menos los puntos en los que se anule el denominador. Las funciones racionales se pueden descomponer en fracciones simples.

Supondremos que el grado del numerador es menor que el del denominador. Si no fuese así, se hace la división y se expresa el numerador $(P(x))$ en función del denominador $(Q(x))$, del cociente $(C(x))$ y del resto $(R(x))$, es decir, $P(x) = Q(x)\,C(x) + R(x)$. Dividiendo a ambos miembros por $Q(x)$ se obtiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde $C(X)$ y $R(x)$ son polinomios y el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Por tanto, la integración de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se reduce a la integración del polinomio $C(x)$, que es inmediata, y a la de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, cuyo numerador tiene grado menor que el denominador.

Así, supondremos que el grado del numerador de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es menor que el grado del denominador. También supondremos que el coeficiente del término de mayor grado de $Q(x)$ es 1.

Descomposición en fracciones simples: Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las raíces de $Q(x)$.

Caso 1: Las raíces a_i son reales y distintas.

Entonces, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer de la forma siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

y por tanto,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}\,dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x-a_n}\,dx$$

donde $\displaystyle\int \frac{A_i}{x-a_i}\,dx = A_i \ln|x-a_i| + C$.

Determinación de A_i:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

multiplicando ambos miembros de la igualdad por $(x-a_i)$ se obtiene:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_n)} =$$

$$\frac{A_1(x-a_i)}{x-a_1} + \ldots \frac{A_{i-1}(x-a_i)}{x-a_{i-1}} + \frac{A_i(x-a_i)}{x-a_i} + \frac{A_{i+1}(x-a_i)}{x-a_{i+1}} \ldots + \frac{A_n(x-a_i)}{x-a_n} =$$

$$\frac{A_1(x-a_i)}{x-a_1} + \ldots \frac{A_{i-1}(x-a_i)}{x-a_{i-1}} + A_i + \frac{A_{i+1}(x-a_i)}{x-a_{i+1}} \ldots + \frac{A_n(x-a_i)}{x-a_n},$$

y sustituyendo x por a_i, se tiene que

$$A_i = \frac{P(a_i)}{(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}.$$

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$.

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2},$$

multiplicando ambos miembros por $(x-1)$, se obtiene:

$\displaystyle\frac{x}{x-2} = A_1 + \frac{A_2(x-1)}{x-2}$, y para $x=1$ se tiene que $A_1 = -1$.

De forma análoga se obtiene A_2, es decir, multiplicando ambos miembros por $(x-2)$:

$\displaystyle\frac{x}{x-1} = \frac{A_1(x-2)}{x-1} + A_2$, y para $x=2$ se tiene que $A_2 = 2$.

Así,

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C.$$

Caso 2: Las raíces son reales pero algunas con multiplicidad mayor que 1.

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ las raíces, con multiplicidad $n_1, n_2, \ldots, n_k$, respectivamente, siendo $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$ (grado de $Q(x)$). Entonces, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} \\
&+ \frac{A_{21}}{x-a_2} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} \\
&\vdots \\
&+ \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \ldots + \frac{A_{kn_k}}{(x-a_k)^{n_k}}
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx &= \int \frac{A_{11}}{x-a_1}\,dx + \int \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}\,dx + \ldots + \int \frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}\,dx \\
&+ \int \frac{A_{21}}{x-a_2}\,dx + \int \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}\,dx + \ldots + \int \frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}\,dx \\
&\vdots \\
&+ \int \frac{A_{k1}}{x-a_k}\,dx + \int \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2}\,dx + \ldots + \int \frac{A_{kn_k}}{(x-a_k)^{n_k}}\,dx
\end{aligned}$$

donde $\displaystyle\int \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^h}\,dx = \frac{-A_{ij}}{(h-1)(x-a_i)^{h-1}} + C$, si $h \neq 1$.

Los coeficientes $A_{11}, \ldots, A_{kn_k}$ se obtienen reduciendo a común denominador. El mínimo común múltiplo será $Q(x)$, e igualando los numeradores se obtiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx.$

$$\frac{x}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{x}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} =$$

$$\frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}=\frac{Ax^2+(-2A+B)x+(A-B+C)}{(x-1)^3},$$

es decir,

$$\frac{x}{(x-1)^3}=\frac{Ax^2+(-2A+B)x+(A-B+C)}{(x-1)^3},$$

y dado que los denominadores son iguales, también deben coincidir los numeradores.

Por tanto, igualando los coeficientes de términos del mismo grado, se tiene:

$$\begin{cases} A=0 \\ B-2A=1 \\ A-B+C=0 \end{cases}$$

y como consecuencia: $A=0$, $B=1$ y $C=1$.

Así,

$$\int \frac{x}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx=\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx=$$

$$\frac{-1}{(x-1)}+\frac{-1}{2(x-1)^2}+C.$$

7. Integración de funciones trigonométricas

Las integrales $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)\,dx$, $\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx$ y $\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx$

se transforman en integrales inmediatas mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y &= \cos(x-y)-\cos(x+y) \\ 2\cos x\cos y &= \cos(x-y)+\cos(x+y) \\ 2\operatorname{sen}x\cos y &= \operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y) \end{aligned}$$

Ejemplo: $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

Aplicando la primera igualdad, se tiene que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$, por tanto,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)) + C.$$

8. Ejercicios

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int (x^2 - 3x + 2)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = 4\sqrt[4]{x} + C$

3. $\int x^2 e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

4. $\int \frac{1+\ln x}{3 + x\ln x}\,dx = \ln|3 + x\ln x| + C$

5. $\int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

6. $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx$

   $= -\frac{\cos(5x)}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$

7. $\int \frac{dx}{x^2-4}\,dx = \ln\sqrt[4]{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|} + C$

8. $\int e^{e^x + x}\,dx = e^{e^x} + C$

9. $\int \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{x - \operatorname{sen} x}{2} + C$

10. $\int \frac{x}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$

11. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx$

    $= \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C$

12. $\int (x^2 + x\sqrt{x^2-1})\,dx$

    $= \frac{x^3 + \sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + C$

13. $\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$

14. $\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx = \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

15. $\int \cos^2 3x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} + C$

16. $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\,dx$

    $= \frac{-1}{2(x^2+x+1)^2} + C$

17. $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx$

    $= 5\ln|x-2| - 3\ln|x-1| + C$

Parte II: Integral Definida o integral de Riemann

1. Definiciones generales

Partición. Definición

Dado un intervalo $[a, b] \subset I\!R$, se llama partición de $[a, b]$ a una colección finita de puntos en el intervalo, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tales que $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Toda partición P del intervalo $[a, b]$ divide a éste en n subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Suma superior e inferior. Definición

Sea $f : [a, b] \longrightarrow I\!R$ una función acotada, y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$.

a) Se define la suma inferior de f en $[a, b]$ con respecto a la partición P, y se denota por $L(P, f)$, como:

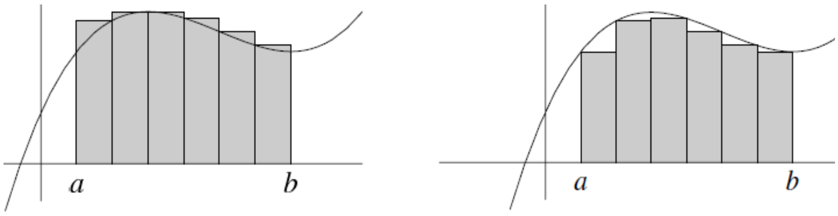
$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}), \quad \text{donde} \quad m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

a) Se define la suma superior de f en $[a, b]$ con respecto a la partición P, y se denota por $U(P, f)$, como:

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}), \quad \text{donde} \quad M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

En la figura 2 se representan las áreas a las que hacen referencia la suma superior y la suma inferior de una función $f(x) \geq 0$ respecto de una determinada partición del intervalo $[a, b]$.

Figura 2:



2. Integrabilidad. Definición

Se dice que la función $f : [a, b] \longrightarrow I\!R$ acotada es integrable Riemann (o simplemente integrable) en $[a, b]$ si

$$\sup\{L(P, f) : P \,\text{partición de}[a, b]\} = \inf\{U(P, f) : P \,\text{partición de}[a, b]\}$$

A este número se le denomina integral definida o integral de Riemann de $f(x)$ en $[a, b]$ y se denota por $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\,dx$.

Notas:

1. Cuando $a = b$ o $b < a$ se utilizará el convenio siguiente:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. Si f es integrable y positiva en el intervalo $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la región limitada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

3. Funciones integrables

Sea $f : [a, b] \longrightarrow I\!R$ una función acotada. Se verifica:

1. Si f es monótona en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

2. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

3. Si f es continua en $[a, b]$ salvo en un conjunto finito, o incluso infinito numerable, de puntos de $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

4. Sea $c \in (a, b)$, entonces f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

5. Si $f : [a, b] \longrightarrow I\!R$ es integrable, entonces $|f|$ también es integrable y

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

6. Si $f : [a, b] \longrightarrow I\!R$ es integrable, entonces, para todo $n \in I\!N$, f^n también es integrable.

7. Si $f, g : [a, b] \longrightarrow I\!R$ son integrables, entonces fg es integrable en $[a, b]$.

8. Si $f : [a, b] \longrightarrow I\!R$ es integrable y $f(x) \geq \delta > 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\dfrac{1}{f}$ es integrable en $[a, b]$.

4. Propiedades básicas de la integral

1. Si $f, g : [a, b] \longrightarrow I\!R$ son integrables y $\lambda \in I\!R$, entonces:

   i) $f + g$ es integrable y $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

   ii) λf es integrable y $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

2. Si $f, g : [a, b] \longrightarrow I\!R$ son funciones integrables tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se verifica que

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

5. Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ continua y sea $G : [a,b] \longrightarrow I\!R$. Entonces son equivalentes

i) G es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

ii) $G(x) - G(a) = \int_a^x f(t)\,dt$ para todo $x \in [a,b]$.

Corolario. Regla de Barrow

Si f es una función continua en $[a,b]$ y G es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

El Teorema Fundamental del Cálculo relaciona los dos conceptos más importantes del Análisis, la derivación y la integración.

La regla de Barrow reduce el problema del cálculo del área a encontrar una función primitiva de f, para lo que se usarán las técnicas vistas en la Parte I. A continuación se dan las versiones para la integral definida de la integración por partes y de la técnica del cambio de variable.

Integración por partes

Si $f, g : [a,b] \longrightarrow I\!R$ son dos funciones con derivada continua, entonces

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

Cambio de variable

Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$ y $f : g([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, haciendo el cambio $t = g(x)$, se tiene

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

6. Integrales impropias

En esta sección se trata de generalizar el concepto de integral definida en $\mathbb{R}$ a casos en los que interviene el infinito, ya sea porque el intervalo de integración sea no acotado, o porque la función a integrar sea no acotada.

Integral impropia. Definición

La integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ se dice que es impropia si ocurre al menos una de las hipótesis siguientes:

i) El intervalo (a,b) no está acotado.

ii) La función f no está acotada en el intervalo (a,b).

6.1. Integrales en intervalos no acotados

Integral impropia de primera especie. Definición

Se denominan integrales impropias de primera especie a las integrales de funciones acotadas sobre intervalos de longitud infinita, es decir, integrales del tipo:

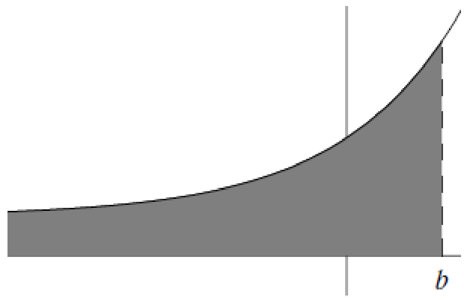
$$a) \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx \qquad b) \int_a^{\infty} f(x)\, dx \qquad c) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

a) Sea $f(x)$ una función acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[M, b]$, siendo b un valor fijo y M un valor cualquiera tal que $M \leq b$. Se define la integral impropia $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ como

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M \to -\infty} \int_{M}^{b} f(x)\,dx$$

La integral del primer miembro se dice que es convergente o divergente según que exista límite finito o infinito en el segundo miembro. Si no existe dicho límite, se dice que no existe la integral.

Figura 3:



El área de la zona sombreada es finita si la integral es convergente e infinita si es divergente (véase figura 3).

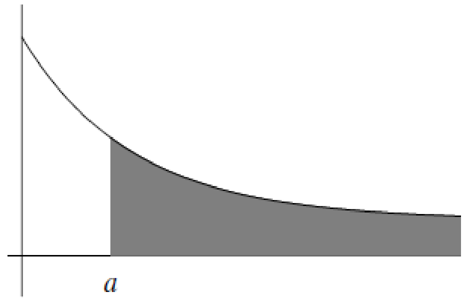
b) Sea $f(x)$ una función acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[a, M]$, siendo a un valor fijo y M un valor cualquiera tal que $M \geq a$. Se define la integral impropia $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ como

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M \to \infty} \int_{a}^{M} f(x)\,dx$$

La integral del primer miembro se dice que es convergente o divergente según que exista límite finito o infinito en el segundo miembro. Si no existe dicho límite, se dice que no existe la integral.

El área de la zona sombreada es finita si la integral es convergente e infinita si es divergente (véase figura 4).

Figura 4:



c) Se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx,$$

siendo c un número real arbitrario. Entonces, teniendo en cuenta a) y b), se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M_1\to-\infty}\int_{M_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{M_2\to\infty}\int_{c}^{M_2} f(x)\,dx$$

La integral del primer miembro se dice que es convergente si existen y son finitos ambos límites, y se dice divergente si al menos uno de los dos límites es infinito. En otro caso, se dice que no existe la integral.

El carácter de la integral y su valor no dependen del c elegido.

Ejemplo

La integral $\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx$ es una integral impropia de primera especie ya que la función $f(x) = e^{-3x}$ es acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[0, M]$. Entonces,

$$\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} e^{-3x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{M} = \lim_{M\to\infty}\frac{e^{-3M}-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

6.2. Integrales de funciones no acotadas

Integral impropia de segunda especie. Definición

Se denomiman integrales impropias de segunda especie a las integrales de funciones no acotadas en ningún entorno de uno o varios puntos de un intervalo finito $[a, b]$.

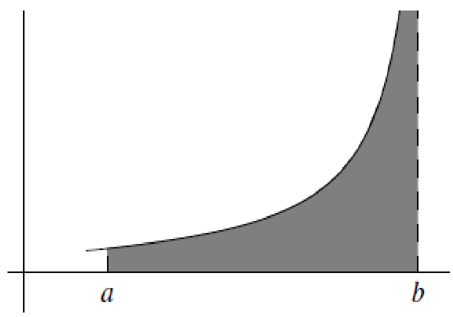
a) Caso de un solo punto de no acotación correspondiente al límite superior b.

   Sea $f(x)$ una función integrable en todo intervalo cerrado contenido en $[a, b)$. Se define la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

   La integral del primer miembro se dice que es convergente o divergente según que exista límite finito o infinito en el segundo miembro. Si no existe dicho límite, se dice que no existe la integral.

Figura 5:



   El área de la zona sombreada es finita si la integral es convergente e infinita si es divergente (véase figura 5).

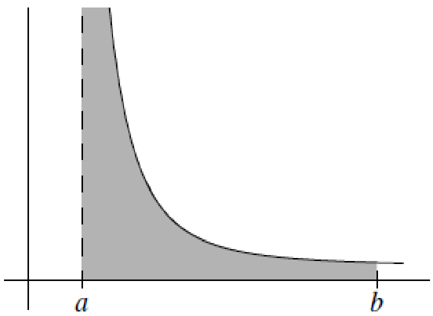
b) Caso de un solo punto de no acotación correspondiente al límite inferior a.

Sea $f(x)$ una función integrable en todo intervalo cerrado contenido en $(a, b]$. Se define la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

La integral del primer miembro se dice que es convergente o divergente según que exista límite finito o infinito en el segundo miembro. Si no existe dicho límite, se dice que no existe la integral.

Figura 6:



El área de la zona sombreada es finita si la integral es convergente e infinita si es divergente (véase figura 6).

c) Caso de un solo punto c interior al intervalo $[a, b]$.

Se define

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

La integral del primer miembro se dice que es convergente si existen y son finitos ambos límites, y se dice divergente si al menos uno de los dos límites es infinito. En otro caso, se dice que no existe la integral.

Dada una función continua en un intervalo, salvo en un número finito de puntos, y no acotada en ningún entorno de dichos puntos, se usará la propiedad de aditividad respecto del intervalo de integración para descomponer la integral en suma de las que fuese necesario, de modo que para cada intervalo de integración la función únicamente no esté acotada en uno de los extremos.

Ejemplo

La integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ es una integral impropia de segunda especie ya que la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es no acotada en el punto $x = 1$ correspondiente al límite superior. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{b-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\operatorname{arc\,sen} x]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\operatorname{arc\,sen}(1-\varepsilon) - \operatorname{arc\,sen} 0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

6.3. Integral impropia de tercera especie. Definición

Se denominan integrales impropias de tercera especie a las integrales sobre intervalos no acotados de funciones no acotadas en ningún entorno de uno o varios puntos de un intervalo $[a, b]$.

El estudio de una integral impropia de tercera especie se reduce, por la aditividad respecto al intervalo, a estudiar por separado una (o dos) integrales de primera especie y una (o varias) de segunda especie.

Si todas las integrales de los sumandos son convergentes, la dada es convergente. Si alguna es divergente, la dada es divergente.

7. Aplicaciones geométricas de la integral

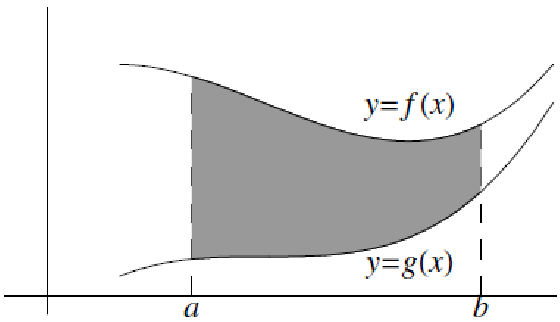
En esta sección veremos algunas aplicaciones de tipo geométrico del cálculo integral, como el cálculo de áreas, longitudes de arco y volúmenes, que se pueden tratar mediante integrales de funciones de una variable.

7.1. Área de una región plana

Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el área de la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (véase figura 7) es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Figura 7:



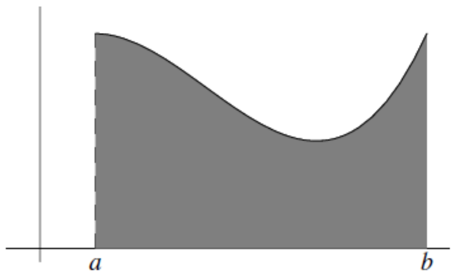
Observaciones:

1. El intervalo (a, b) puede ser infinito y en ese caso la definición es análoga, pero es preciso que la integral impropia sea convergente.

2. Si $f(x) \geq 0$ y $g(x) = 0$, se obtiene el área de la figura plana determinada por f, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje de abscisas (véase figura 8), que es

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Figura 8:

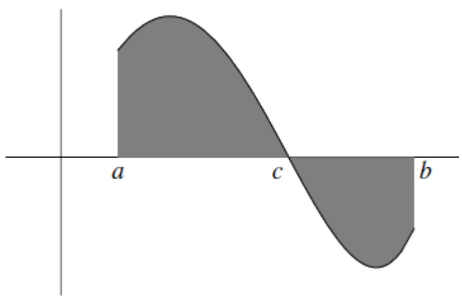


3. Supongamos que $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, c]$ y $f(x) \leq 0$ para $x \in [c, b]$, entonces podemos obtener el área de la región plana encerrada por f, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje de OX de la forma siguiente (véase figura 9):

$$A = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx$$

puesto que $-f(x) \geq 0$ para $x \in [c, b]$ y $\displaystyle\int_c^b - f(x)\, dx = -\int_c^b f(x)\, dx$

Figura 9:



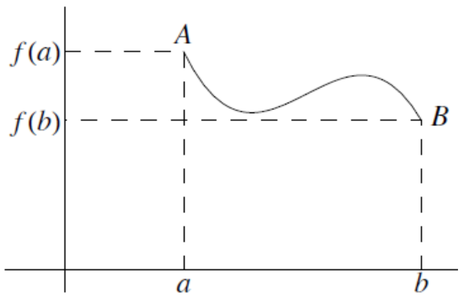
7.2. Longitud de un arco de curva

Dada la curva $y = f(x)$, siendo f una función derivable y con derivada continua en $[a, b]$, la longitud del arco AB de dicha curva viene dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

siendo A y B los puntos de coordenadas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ respectivamente (véase figura 10).

Figura 10:

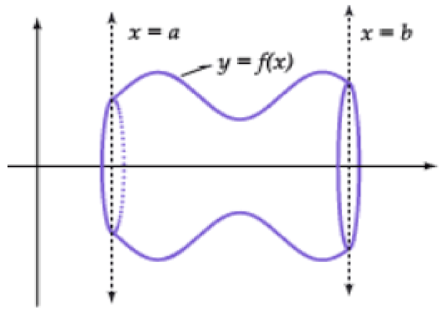


7.3. Volumen de un cuerpo de revolución

Si se hace girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX se genera un sólido de revolución cuyos cortes perpendiculares al eje OX tienen área $A(x) = \pi(f(x))^2$ (al ser circunferencias de radio $|f(x)|$) (véase figura 11); por tanto,

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\, dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Figura 11:



7.4. Área de una superficie de revolución

Sea $y = f(x)$ con $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$ y f' continua en $[a, b]$. Entonces el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX entre los valores de abscisas a y b es

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

8. Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_0^2 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\, dx = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3x + 2}\, dx = \ln \frac{9}{8}$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2 2x\, dx = \frac{\pi}{4}$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = 2(1 - \ln 2)$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx = 2\pi$

2. Calcular las siguientes integrales impropias, caso de que sean convergentes:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3}$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$ no es convergente
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$ no es convergente
5. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \ln x\, dx$ no es convergente
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx = 1$
7. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{2x}\, dx$ no es convergente

3. Determinar el área limitada por $y = x^2 - 3x + 2$ y el eje OX entre:

a) $x = 0$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = 3$

4. Calcular el área limitada por $y = x(x-1)^2$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 1$.

5. Obtener el área limitada por la onda $y = \mathrm{sen} x$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

6. Hallar el área comprendida por las curvas:

a) $y = 2\sqrt{x}$ e $y = \dfrac{x^2}{4}$ b) $y = x^2$ y $x - y + 2 = 0$

7. Determinar la longitud del arco

a) de la curva $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ comprendido entre los puntos de abscisas $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

b) de la curva $y = \sqrt{x - x^2} + \mathrm{arc\ sen}\sqrt{x}$ comprendido entre los puntos de abscisas $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

8. Hallar el volumen engendrado por la rotación alrededor del eje OX de la superficie limitada por dicho eje, la curva $y = x^3$ y la recta $x = 1$.

9. Calcular el volumen del sólido engendrado por la rotación, alrededor del eje OX, de la figura limitada por la curva $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \ln 2$.

10. Obtener el área de la superficie generada por la rotación, alrededor del eje OX, de la curva $y = x^3$ entre los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

12. Hallar el área de la superficie que se obtiene al girar, en torno al eje OX, la curva $y = \sqrt{4x}$ entre las abscisas 0 y 1.